Steven Strogatz · *The Joy of x*

STEVEN STROGATZ

THE Joy of *x*

Die Schönheit der Mathematik

Aus dem Amerikanischen von
Susanne Kuhlmann-Krieg

KEIN & ABER

Die Originalausgabe erschien 2012 unter dem Titel
The Joy of x. A Guided Tour of Math, from One to Infinity
bei Houghton Mifflin Harcourt, Boston – New York

Deutsche Erstausgabe

Umschlaggestaltung: Yasuyo Iguchi
Illustrationen: Margaret Nelson
Druck und Bindung: CPI – Ebner & Spiegel, Ulm
ISBN 978-3-0369-5692-3
Auch als eBook erhältlich

www.keinundaber.ch

Inhalt

Teil 2 BEZIEHUNGEN

Teil 3 FORMEN

Teil 4 VERÄNDERLICHES

Teil 5 DATEN

Teil 6 GRENZGÄNGER

Vorwort

Ein Freund von mir ist von Beruf Künstler, hat aber einen unglaublichen Spaß an Wissenschaften. Wenn wir zusammen sind, will er über nichts anderes reden als über die neuesten Erkenntnisse aus Psychologie und Quantenmechanik. Sobald es aber um Mathematik geht, kommt er ins Schwimmen, und das betrübt ihn. Die seltsamen Symbole machen ihm zu schaffen, sagt er. Er wisse noch nicht einmal, wie er sie nennen solle.

Genau genommen reicht seine Verdrossenheit noch viel weiter. Er kann sich nicht recht vorstellen, was Mathematiker den ganzen Tag über tun, oder was sie meinen, wenn sie einen Beweis als elegant bezeichnen. Manchmal sagen wir im Spaß, ich sollte ihn mir einfach mal vorknöpfen und ihm, angefangen mit 1 + 1 = 2, alles beibringen, was ich weiß – mal sehen, wie weit wir kämen.

So verrückt es klingt, genau das werde ich mit diesem Buch versuchen. Es ist eine Sightseeingtour durch die Elemente der Mathematik von der Vorschule bis zur Universität und richtet sich an alle, die auf diesem Gebiet gerne eine zweite Chance hätten – dieses Mal allerdings aus der Erwachsenenperspektive. Das Ganze soll kein Förderkurs werden. Ziel ist, Ihnen ein besseres Gefühl dafür zu vermitteln, worum es in der Mathematik geht und warum sie für diejenigen, die ihre Prinzipien verstehen, so unerhört spannend ist.

Wir werden feststellen, dass sich mit Michael Jordans Korblegern einige Grundbegriffe der Infinitesimalrechnung anschaulich erklären lassen. Ich werde Ihnen eine einfache und wirklich erstaunliche Art und Weise vorführen, den Grundpfeiler der Geometrie, den Satz des Pythagoras, zu verstehen. Wir werden versuchen, einigen der kleinen und großen Geheimnisse unseres Alltagslebens auf den Grund zu kommen: Ist O. J. Simpson schuldig? Wie sollten Sie Ihre Matratze drehen und wenden, um die Abnutzung möglichst gleichmäßig zu gestalten? Mit wie vielen Partnern oder Partnerinnen sollten Sie es probieren, bevor Sie sich endgültig festlegen? Und warum sind einige Unendlichkeiten größer als andere?

Mathematik ist überall, man muss nur wissen, wo man zu suchen hat. Wir werden in den Streifen eines Zebras Sinuskurven ausmachen, aus der amerikanischen Unabhängigkeitserklärung Euklid widerhallen hören und erkennen, dass sich die Allianzen im Vorfeld des Ersten Weltkriegs mit negativen Zahlen beschreiben lassen. Und wir werden sehen, dass unser heutiges Leben ganz im Zeichen neuer Arten von Mathematik steht – wenn wir online nach Restaurants suchen zum Beispiel oder uns mühen, die erschreckenden Bocksprünge des Aktienmarkts zu verstehen und für uns zu nutzen.

Der Zufall – der für ein Buch über Zahlen nur allzu angemessen scheint – will es, dass die Idee dazu genau an dem Tag das Licht der Welt erblickte, als ich fünfzig wurde. David Shipley, seinerzeit Chef der Kommentarredaktion bei der *New York Times*, hatte mich an jenem großen Tag (in Unkenntnis seiner Bedeutung als Endpunkt meines persönlichen halben Jahrhunderts) zum Mittagessen eingeladen und gefragt, ob ich mir vielleicht vorstellen könnte, für seine Leser eine Mathematikkolumne zu schreiben. Ich verliebte mich auf der Stelle in den Gedanken, die Freuden der Mathematik mit einem größeren Publikum als meinem wissbegierigen Künstlerfreund teilen zu können.

»The Elements of Math« erschien Ende Januar 2010 online und lief fünfzehn Wochen lang. Als Reaktion darauf erhielten wir massenweise Briefe und Kommentare von Lesern aller Altersstufen. Viele Lehrer und Studenten waren darunter, ansonsten schlicht wissbegierige Menschen, die, aus welchen Gründen auch immer, an irgendeinem Punkt ihrer mathematischen Ausbildung ausgestiegen waren, aber das Gefühl nicht loswurden, sie könnten da etwas Interessantes versäumen. Als besonders befriedigend empfand ich Zeilen von Eltern, die mir dankbar bescheinigten, ihren Kindern Mathematik auf eine Weise verständlicher gemacht zu haben, von der sie selbst ebenfalls profitiert hätten. Selbst meinen Kollegen und anderen Mathematik liebenden Zeitgenossen schienen die Miniaturen zu gefallen – wenn sie nicht gerade mit Verbesserungsvorschlägen beschäftigt waren (oder vielleicht dann erst recht!).

Alles in allem hat mich die Erfahrung davon überzeugt, dass es in der breiten Öffentlichkeit einen tief sitzenden, aber leider wenig beachteten Appetit auf Mathematik gibt. Trotz all der Geschichten, die wir über Mathematikängste hören, *wollen* viele Leute das Gebiet einfach ein bisschen besser verstehen. Und wenn sie das tun, stellen sie fest, dass es süchtig macht.

The Joy of x ist eine Einführung in die faszinierendsten und einschneidendsten Kapitel der Mathematik. Die einzelnen Lektionen – darunter einige aus der ursprünglichen *Times*-Serie – sind mundgerecht zubereitet und werden im Großen und Ganzen unabhängig voneinander serviert, seien Sie also so frei, und naschen Sie, wo es Ihnen beliebt. Wenn Sie in eine bestimmte Materie tiefer eintauchen möchten, finden Sie zusätzliche Informationen in den Anmerkungen am Ende des Buchs, ebenso Vorschläge für weiterführenden Lesestoff und zahlreiche Links zu Blogs, Videos und weiteren zum Teil kuriosen Veranschaulichungen.

Lesern zuliebe, die gerne Schritt für Schritt an die Dinge herangehen, habe ich den Stoff des Buchs in sechs Hauptabschnitte unterteilt, die grob dem herkömmlichen Lehrplan folgen.

Teil 1, »Zahlen«, beginnt unsere Reise mit Kindergarten- und Grundschularithmetik und verdeutlicht, wie unerhört praktisch Zahlen zur Beschreibung der Welt sind.

Teil 2, »Beziehungen«, springt vom einfachen Hantieren mit Zahlen zur Arbeit mit *Beziehungen* zwischen Zahlen. Hier finden Sie Überlegungen, die den Kern der Algebra darstellen. Diese Überlegungen bilden die Grundlage dafür, die gegenseitige Beeinflussung von Dingen zu beschreiben: Ursache und Folge, Angebot und Nachfrage, Dosis und Wirkung und so weiter, jene Art von Wechselbeziehungen eben, die die Welt so kompliziert und vielgestaltig machen.

Teil 3, »Formen«, kommt von Zahlen und Symbolen auf Formen und Räume und führt ins Reich der Geometrie und der Trigonometrie. Hier wird nicht nur alles Sichtbare beschrieben, sondern die Mathematik durch Logik und Beweis auf eine neue Ebene der Präzision erhoben.

In Teil 4, »Veränderliches«, kommen wir zur Infinitesimalrechnung oder Analysis, dem fruchtbarsten Zweig der Mathematik. Die Infinitesimalrechnung hat es möglich gemacht, die Bewegungen von Planeten, den Rhythmus der Gezeiten und so ziemlich jede andere Form von fließender Veränderung im Universum und bei uns selbst vorherzusagen. Unendlichkeit ist ein wichtiges Thema in diesem Buch. Ihre Zähmung war der Durchbruch, der diese Disziplin funktionieren ließ: Mithilfe der fantastischen Macht des Unendlichen hat die Infinitesimalrechnung viele der uralten mathematischen Probleme, über die sich schon die Mathematiker der Antike den Kopf zerbrochen hatten, lösen können und hat so letztlich der wissenschaftlichen Revolution und der modernen Welt den Weg bereitet.

Teil 5, »Daten«, befasst sich mit Wahrscheinlichkeit, Statistik, Netzwerken und der Auswertung von Datenmengen, allesamt relativ junge Themen, die von der unordentlichen Seite des Lebens inspiriert wurden: Zufall und Glück, Unsicherheit, Risiken, Unbeständigkeit, Vernetzung. Wir werden sehen, wie man mit den richtigen Arten von Mathematik und der richtigen Sorte Daten aus dem großen Mahlstrom sinnvolle Aussagen herausdestillieren kann.

Wenn wir uns in Teil 6, »Grenzgänger«, dem Ende unserer Reise nähern, kommen wir an die Außenbezirke des mathematischen Wissens, ins Niemandsland zwischen Bekanntem und Unbekanntem. Die Reihenfolge der Kapitel innerhalb dieses Abschnitts folgt derselben Gliederung, nach der auch die übrigen Teile des Buchs – Zahlen, Beziehungen, Formen, Veränderliches und Daten – angeordnet sind, aber jedes Thema wird hier noch einmal tiefer gehend in seiner modernsten Auslegung behandelt.

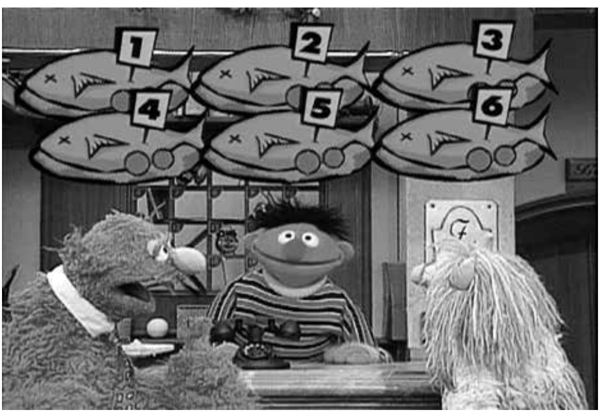
Ich hoffe, dass Ihnen alle nun folgenden Überlegungen und Ideen Freude und eine ordentliche Handvoll Aha-Momente bereiten werden. Aber jede Reise hat einen Anfang, lassen Sie uns also mit dem einfachen und doch magischen Akt des Zählens beginnen.

TEIL I

Zahlen

1 Von Fischen und Unendlichkeiten

Die beste Einführung in das Thema Zahlen, die ich je gesehen habe – die klarste und lustigste Antwort auf die Frage, was Zahlen sind und wozu wir sie brauchen –, stammt aus der *Sesamstraße*. Humphrey, ein liebenswerter, etwas unterbelichteter Geselle mit rosa Fell und grüner Nase, schiebt Mittagsschicht im Furry Arms Hotel und bekommt einen Anruf aus einem Zimmer voller Pinguine. Humphrey passt ganz genau auf und gibt dann die Bestellung an die Küche weiter: »Fisch, Fisch, Fisch, Fisch, Fisch, Fisch.« Willkommener Anlass für Ernie, Humphrey über die Vorzüge der Zahl Sechs aufzuklären.



Kinder lernen auf diese Weise, dass Zahlen wunderbare Abkürzungen sind. Statt das Wort »Fisch« so oft zu sagen, wie es der Zahl der Pinguine entspricht, hätte Humphrey sich des weit praktischeren Konzepts der Zahl Sechs bedienen können.

Uns Erwachsenen kommt womöglich sofort ein Nachteil in den Sinn. Sicher, Zahlen sind superzeitsparend – aber um den beträchtlichen Preis der Abstraktion. »Sechs« ist sehr viel weniger eindeutig als »Fisch«, weil es allgemeiner ist. Es passt auf alles: sechs Teller, sechs Pinguine, sechs Mal das Wort »Fisch«. Die hier genannten Dinge haben nur eins gemein: das Sechssein.

So betrachtet, wirken Zahlen ein bisschen geheimnisvoll. Sie existieren offenbar in einer Art platonischem Reich irgendwo außerhalb der Wirklichkeit. In dieser Hinsicht ähneln sie eher anderen windigen Begriffen (»Wahrheit« und »Gerechtigkeit« zum Beispiel) als einem Konzept des alltäglichen Lebens. Denkt man weiter darüber nach, wird ihr philosophischer Zustand sogar noch undurchsichtiger. Woher kommen Zahlen eigentlich? Hat die Menschheit sie erfunden? Oder wurden sie von ihr entdeckt?

Eine weitere Besonderheit ist, dass Zahlen (und alle anderen mathematischen Konzepte im Übrigen auch) ein Eigenleben haben. Wir können sie nicht kontrollieren. Obwohl sie in unseren Gedanken existieren, können wir, sobald wir einmal entschieden haben, was wir mit ihnen sagen wollen, ihr Verhalten nicht mehr beeinflussen. Sie gehorchen bestimmten Gesetzen und haben bestimmte Eigenschaften, Persönlichkeiten und gewisse Gepflogenheiten. Es gibt nichts, was wir daran ändern können, wir können nur beobachten und versuchen zu verstehen. In diesem Sinne erinnern sie auf gespenstische Weise Atomen und Sternen, anderen Dingen dieser Welt eben, die Gesetzen gehorchen, die sich unserer Kontrolle entziehen … mit dem einen Unterschied, dass diese anderen Dinge auch außerhalb unserer Köpfe existieren.

Dieser zweifache Aspekt von Zahlen – halb Himmel, halb Erde – ist vielleicht ihr paradoxestes Merkmal und genau das, was sie so nützlich macht. Dieses Merkmal hatte der Physiker Eugene Wigner im Sinn, als er über die »unbegreifliche Erklärungsmacht der Mathematik« schrieb.

Für den Fall, dass nicht klar sein sollte, was ich mit dem Leben der Zahlen und ihrem unkontrollierbaren Verhalten meine, lassen Sie uns ins Furry Arms zurückkehren. Angenommen, Humphrey bekäme, bevor er seine Fischbestellung aufgeben kann, plötzlich einen Anruf aus einem anderen Zimmer, das von exakt derselben Anzahl an Pinguinen bewohnt wird, die ebenfalls alle je einen Fisch haben wollen. Was soll Humphrey nach den beiden Telefonaten nun in die Küche rufen? Wenn er nichts gelernt hat, könnte er für jeden Pinguin ein Mal »Fisch« rufen. Oder, wenn er seine Zahlen zu Hilfe nimmt, kann er dem Koch sagen, er hätte sechs Fischbestellungen für das erste Zimmer und weitere sechs für das zweite Zimmer. Was er aber eigentlich braucht, ist ein neues Konzept: die Addition. Wenn er die beherrscht, kann er stolz vermelden, er brauche sechs plus sechs (oder wenn er ein Angeber ist: zwölf) Mal Fisch.

Der hier greifende schöpferische Prozess ist derselbe wie der, der uns Zahlen überhaupt erst gebracht hat. So wie Zahlen eine Abkürzung für das Aufzählen von lauter Einserbeträgen sind, ist die Addition eine Abkürzung für das Aufzählen von Beträgen beliebiger Größe. Und genauso entwickelt sich Mathematik: Die richtige Abstraktion führt zu neuer Einsicht und neuen Möglichkeiten.

Über kurz oder lang wird vielleicht sogar Humphrey realisieren, dass er bis in alle Ewigkeit weiterzählen kann.

Doch trotz dieses Flirts mit dem Unendlichen sind unserer Kreativität immer auch Grenzen gesetzt. Wir können entscheiden, was wir mit Konzepten wie 6 und + meinen, aber sobald wir das getan haben, entzieht sich das Ergebnis von 6 + 6 unserer Kontrolle. Die Logik lässt uns keine Wahl. In diesem Sinne gehört zur Mathematik immer beides: *Erfindung* und *Entdeckung*: Wir erfinden die Begriffe und Konzepte, aber wir entdecken, was es mit ihnen auf sich hat. Wie wir in den folgenden Kapiteln sehen werden, besteht unsere mathematische Freiheit in unseren Fragen – und darin, wie wir ihnen nachgehen –, nicht in den Antworten, die uns erwarten.

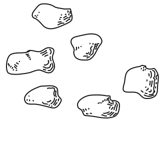
2 Steinreich

Wie alles im Leben hat auch die Arithmetik eine ernste und eine verspielte Seite.

Die ernste umfasst all das, was wir in der Schule gelernt haben: Wie wir mit Zahlenkolonnen umzugehen haben – sie addieren, subtrahieren und durch die Mühlen unserer Tabellenkalkulationen drehen müssen, die wir für unsere Steuererklärungen und Jahresabschlüsse brauchen. Diese Seite der Arithmetik ist wichtig, praktisch und für viele Menschen freudlos.

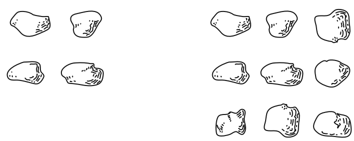
Die verspielte Seite der Arithmetik ist weit weniger bekannt – es sei denn, Sie haben sich in Ihrem Leben mal mit höherer Mathematik befasst. Dabei ist eigentlich gar nichts Höheres daran. Das Ganze ist so natürlich wie die kindliche Neugier.

In seinem Buch *A Mathematician's Lament* (zu Deutsch etwa: »Klagelied eines Mathematikers«) plädiert Paul Lockhart für einen Lehransatz, bei dem Zahlen sehr viel konkreter behandelt werden, als wir es normalerweise tun: Er fordert uns auf, sie sich als Steinchengruppen vorzustellen. Die Zahl Sechs entspricht zum Beispiel einer Handvoll Steinen wie dieser:

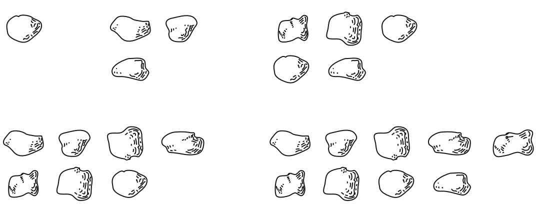


Sie werden hier vermutlich nichts sonderlich Aufregendes sehen, und das ist richtig – solange wir keine weiteren Anforderungen an Zahlen stellen, sehen sie alle ziemlich gleich aus. Unsere Gelegenheit, kreativ zu werden, kommt, sobald wir etwas von ihnen verlangen.

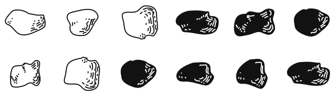
Lassen Sie uns beispielsweise Gruppen betrachten, die ein bis zehn Steinchen enthalten, und fragen, welche davon sich zu Quadraten anordnen lassen. Das funktioniert nur bei zweien: der Gruppe mit 4 und der mit 9 Steinchen, und zwar deshalb, weil $4 = 2 \cdot 2$ und $9 = 3 \cdot 3$ ist. Diese Zahlen erhalten wir, wenn wir eine Zahl mit sich selbst malnehmen – quadrieren heißt tatsächlich nichts anderes als eine quadratische Form bilden.



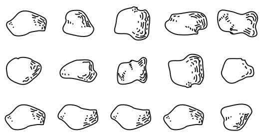
Eine weniger eng gefasste Forderung bestünde darin, Steinchengruppen zu finden, die sich fein säuberlich zu Rechtecken aus zwei genau gleich langen Steinreihen legen lassen. Das geht mit 2, 4, 6, 8 oder 10 Steinchen – die Zahl muss gerade sein. Wenn wir irgendeine der anderen Zahlen zwischen 1 und 10 – der ungeraden Zahlen also – zu zwei Reihen anordnen, ist eine Reihe immer um ein Steinchen länger:



Doch ganz hoffnungslos ist die Lage für diese Sonderlinge nicht: Wenn wir zwei von ihnen zusammenführen, dann ergänzen sich ihre beiden hängenden Enden, und die Endsumme ist gerade; ungerade + ungerade = gerade:



Und wenn wir die Regeln noch ein bisschen lockern, Zahlen über 10 zulassen und dem Rechteck mehr als zwei Steinchenreihen gönnen, entwickeln manche ungeraden Zahlen aus sich heraus urplötzlich ein Talent fürs Rechteckige: Die Zahl 15 kann zum Beispiel ein Rechteck aus 3 · 5 Steinen beschreiben:



Der Zahl 15 bleibt also, obwohl sie unbestreitbar ungerade ist, zumindest der Trost, dass sie eine zusammengesetzte Zahl ist – sie besteht aus drei Reihen zu je fünf Steinen. Genauso hat jeder andere Eintrag in einer Multiplikationstabelle seine eigene rechteckige Steinchengruppe.

Bei einigen Zahlen ist allerdings wirklich Hopfen und Malz verloren. Keine davon kann irgendeine Art Rechteck zustande bringen – abgesehen von einer einfachen Einzelreihe aus Steinchen. Diese seltsam unflexiblen Zahlen sind die berühmten Primzahlen.

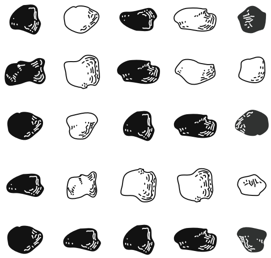
Wir sehen also, dass Zahlen Struktureigenarten aufweisen, die ihnen einen bestimmten Charakter verleihen. Um ihr ganzes Verhaltensspektrum sehen zu können, müssen wir allerdings über die einzelnen Zahlen hinausgehen und schauen, was passiert, wenn sie miteinander zu tun bekommen.

Statt nur zwei beliebige ungerade Zahlen zu addieren, nehmen wir einmal an, wir addierten, bei eins beginnend, alle aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen:

$$1 + 3 = 4$$
$$1 + 3 + 5 = 9$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

Diese Summen ergeben erstaunlicherweise immer perfekte Quadratzahlen. (Wir haben 4 und 9 bereits bei den Steinchenquadraten kennengelernt, $16 = 4 \cdot 4$ und $25 = 5 \cdot 5$.) Kurzes Nachrechnen zeigt, dass diese Regel für immer größer werdende ungerade Zahlen gilt, es sieht ganz so aus, als gelte sie bis ins Unendliche. Aber welchen Zusammenhang könnte es zwischen den ungeraden Zahlen mit ihren störenden Anhängseln und den klassischen symmetrischen Zahlen geben, der solche Quadrate hervorbringt? Nun, wenn wir unsere Steinchen richtig legen, können wir diesen geheimnisvollen Zusammenhang völlig offensichtlich aussehen lassen – der Inbegriff eines eleganten Beweises.

Der Trick besteht darin zu erkennen, dass ungerade Zahlen sich zu L-Formen von gleicher Schenkellänge anordnen lassen, indem man ihre »störenden Anhängsel« als Eckelement verwendet. Und wenn man lauter Ls ineinander legt, bekommt man ein Quadrat!

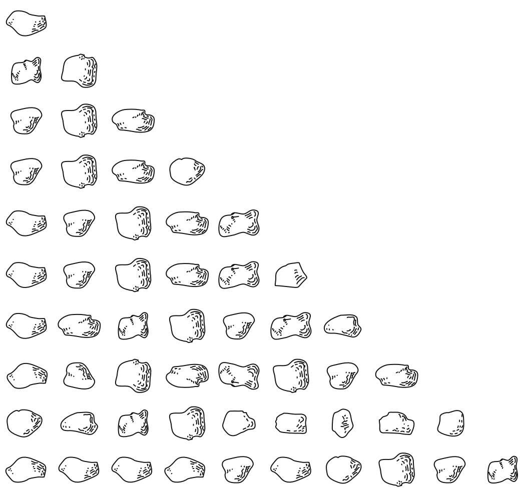


Um diese Art zu denken geht es in einem anderen jüngst erschienenen Buch, auch wenn es eher einen literarischen Ansatz verfolgt: In Yoko Ogawas charmantem Roman *Das Geheimnis der Eulerschen Formel* soll eine gewitzte, aber nicht sehr gebildete junge Mutter eines zehnjährigen Sohnes einen alternden Mathematikprofessor betreuen, dem durch eine Hirnverletzung nur noch ein Kurzzeitgedächtnis von achtzig Minuten geblieben ist. Hilflos in der Gegenwart treibend und in seiner schäbigen Behausung nur von seinen Zahlen umgeben, versucht der Professor, sich der Haushälterin auf die einzige Art zu nähern, die er kennt: Indem er sie nach ihrer Schuhgröße oder ihrem Geburtsdatum fragt und sich dann in mathematischem Smalltalk über ihre Lebensdaten ergeht. Der Professor entwickelt dabei auch eine besondere Zuneigung zum Sohn der Haushälterin, dem er den Namen Root (zu Deutsch: Wurzel) gibt, weil sein Schädel ihn an das Wurzelzeichen $\sqrt{\ }$ erinnert.

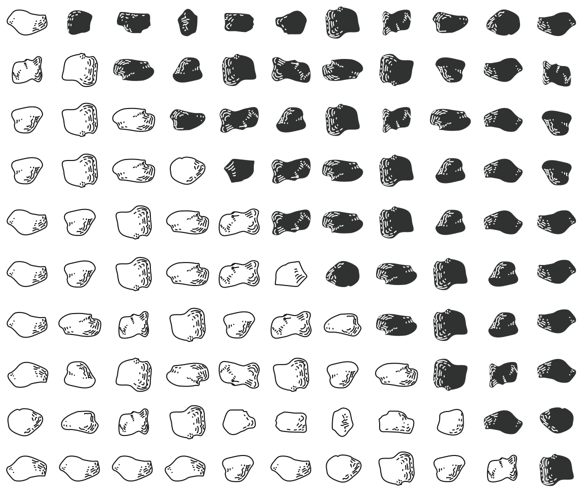
Eines Tages stellt der Professor dem Jungen folgende Aufgabe: Ob er wohl die Summe aller Zahlen von 1 bis 10 herausbekommen könne? Nachdem Root sorgfältig alle Zahlen addiert und dem Professor die Lösung (55) präsentiert hat, bittet dieser ihn, einen anderen Weg zu suchen. Ob er die Antwort auch finden könne, *ohne* die Zahlen zu addieren? Root stampft mit dem Fuß auf und schimpft: »Das ist gemein!«

Seine Mutter aber fühlt sich mehr und mehr von der Welt der Zahlen angezogen und fängt an, der Frage selbst auf den Grund zu gehen. »Es war schon merkwürdig, dass ich mich ernsthaft mit einer Aufgabe befasste, die einem Kind gestellt wurde und überhaupt keinen praktischen Nutzen hatte«, erzählt sie. »In meinen Gedanken rückte der Professor immer weiter in den Hintergrund, und die ganze Sache geriet zu einem regelrechten Kampf zwischen mir und der Aufgabe selbst. Bereits morgens beim Aufwachen spukte die Gleichung in meinem Kopf herum und trieb dort den ganzen Tag ihr Unwesen. Sie brannte sich förmlich in meine Netzhaut ein, sodass ich meinen Blick nicht von ihr abwenden konnte.«

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, das Problem des Professors zu lösen (schauen Sie mal, auf wie viele Sie kommen). Der Professor selbst geht einen ähnlichen Weg, wie wir ihn oben gegangen sind. Er stellt sich die Summe von 1 bis 10 als Dreieck aus Steinchenreihen vor, bei dem die erste Reihe aus einem Steinchen besteht, die zweite aus zwei, die dritte aus drei und so weiter bis zur letzten Reihe aus zehn Steinchen:



Dieses Bild vermittelt seinem Aussehen nach eindeutig das Gefühl, dass da noch etwas fehlt. Es scheint nur zur Hälfte komplett. Und das verleitet zu einem kreativen Gedankensprung. Wenn Sie das Dreieck kopieren, umklappen und dann als fehlende Hälfte an das erste Dreieck anfügen, haben Sie etwas sehr Einfaches: Ein Rechteck mit zehn Reihen zu je elf Steinchen, macht 110 Steinchen:



Da das Originaldreieck die Hälfte dieses Rechtecks bildet, muss die gewünschte Summe die Hälfte von 110 sein, also 55.

Sich Zahlen als Steinchengruppen zu vergegenwärtigen, mag ungewöhnlich scheinen, aber diese Technik ist tatsächlich so alt wie die Mathematik selbst. Das Wort »kalkulieren« spiegelt dieses Erbe wider – es leitet sich von dem lateinischen Wort *calculus* her, einem glatten Steinchen, das zum Zählen und Rechnen verwendet wurde. Fazit: Man muss kein Einstein (oder: kein Stein …) sein, um Spaß an Zahlen zu haben, aber es kann hilfreich sein, Steine im Kopf zu haben.